PART2　2変数関数の最大・最小，4次関数の最大・最小

2　[1]　$x+y=3$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$3x^2+2y^2$ の最小値を求めよ。

(2)　$x\geqq 2$，$y\geqq -1$ のとき，$3x^2+2y^2$ の最大値，最小値を求めよ。

[2]　関数 $y=x^4+4x^2+3$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x^2=t$ とおき，y を t の式で表せ。

(2)　t のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　y の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

Point Pickup

[1]　$3x^2+2y^2$ のように，2 つの変数によって値が定まる関数を「2 変数関数」という。
条件式がある 2 変数関数の最大，最小は，条件式を用いて文字を消去するとよい。
消去する文字に条件がある場合は，残る文字の条件におき換える。

[2]　4 次関数について，おき換えを行うことで，2 次関数として扱うことができる場合がある。おき換えた文字の変域に注意。

第 4 講　PART2　確認問題

1　$3x+y=2$ のとき，$3x^2+y^2$ の最小値を求めよ。

$x=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$y=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ のとき　最小値 $\boxed{オ}$

2　$3x+y=2$，$x \geqq 1$，$y \geqq -4$ のとき，$3x^2+y^2$ の最大値，最小値を求めよ。

$x=\boxed{カ}$，$y=\boxed{キク}$ のとき　最大値 $\boxed{ケコ}$

$x=\boxed{サ}$，$y=\boxed{シス}$ のとき　最小値 $\boxed{セ}$

3　関数 $y=x^4+2x^2+2$ について，$x^2=t$ とおき，y を t の式で表せ。また，t のとりうる値の範囲を求めよ。さらに，y の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

y を t の式で表すと　$y=\boxed{ソ}$

t のとりうる値の範囲は $\boxed{タ}$

y の最小値は　$x=\boxed{チ}$ のとき $\boxed{ツ}$

[$\boxed{ソ}$ の選択肢]

①　t^4+2t^2+2　　②　t^3+2t+2　　③　t^2+2t+2

[$\boxed{タ}$ の選択肢]

①　$t>0$　　②　$t \geqq 0$　　③　すべての実数

PART2　2変数関数の最大・最小，4次関数の最大・最小

2　［1］　$x+y=3$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$3x^2+2y^2$ の最小値を求めよ。

(2)　$x \geqq 2$，$y \geqq -1$ のとき，$3x^2+2y^2$ の最大値，最小値を求めよ。

［2］　関数 $y=x^4+4x^2+3$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x^2=t$ とおき，y を t の式で表せ。

(2)　t のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　y の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

［1］　(1)　$x+y=3$ より　$y=3-x$

これを $3x^2+2y^2$ に代入すると

$$3x^2+2y^2=3x^2+2(3-x)^2=5x^2-12x+18=5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{54}{5}$$

よって，$x=\frac{6}{5}$ のとき最小値 $\frac{54}{5}$ をとる。

$x=\frac{6}{5}$ のとき　$y=3-\frac{6}{5}=\frac{9}{5}$

したがって　$x=\frac{6}{5}$，$y=\frac{9}{5}$ のとき 最小値 $\frac{54}{5}$

(2)　$y \geqq -1$，$y=3-x$ より $3-x \geqq -1$　　よって $x \leqq 4$

これと $x \geqq 2$ より　$2 \leqq x \leqq 4$

$2 \leqq x \leqq 4$ の範囲において，$3x^2+2y^2=5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{54}{5}$ は，$x=4$ のとき最大値 50，

$x=2$ のとき最小値 14 をとる。

$x=4$ のとき　$y=3-4=-1$，$x=2$ のとき　$y=3-2=1$

したがって

$x=4$，$y=-1$ のとき　最大値 50

$x=2$，$y=1$ のとき　最小値 14

［2］ (1)　$y=x^4+4x^2+3$

$=(x^2)^2+4x^2+3=t^2+4t+3$

(2)　$t=x^2$ より　$t \geqq 0$

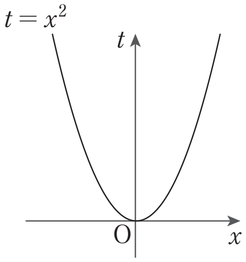
(3)　$y=t^2+4t+3=(t+2)^2-1$

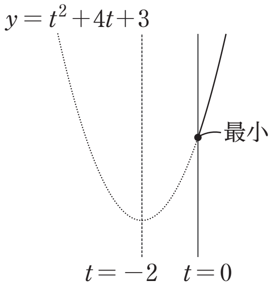
$t \geqq 0$ の範囲で，y は $t=0$ のとき

最小値 3 をとる。

$t=0$ のとき　$x^2=0$ より $x=0$

したがって $x=0$ のとき　最小値 3





第 4 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：1，エ：2，オ：1

[解説]

$3x+y=2$ より　$y=2-3x$

これを $3x^2+y^2$ に代入すると [A]

$$3x^2+y^2=3x^2+(2-3x)^2=12x^2-12x+4$$
$$=12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$$

よって，$x=\frac{1}{2}$ のとき最小値 1 をとる。

$x=\frac{1}{2}$ のとき　$y=2-3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

したがって　**$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ のとき　最小値 1**

[A]　ax^2+by^2 のように，2 つの変数によって値が定まる関数を「2 変数関数」という。条件式がある 2 変数関数の最大，最小は，条件式を用いて 1 つの文字を消去するとよい。

2

[正解] **カ**：2，**キク**：-4，**ケコ**：28，
サ：1，**シス**：-1，**セ**：4

[解説]

$y \geqq -4$，$y=2-3x$ より　$2-3x \geqq -4$ [B]

よって　$x \leqq 2$

これと $x \geqq 1$ より　$1 \leqq x \leqq 2$

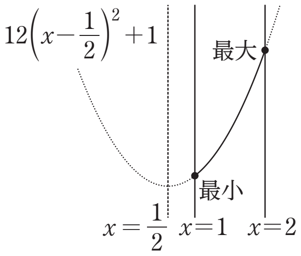
$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲において，

$3x^2+y^2=12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$ は，$x=2$ のとき最大値 28，$x=1$ のとき最小値 4 をとる。

$x=2$ のとき　$y=2-3\cdot 2=-4$，

$x=1$ のとき　$y=2-3\cdot 1=-1$

したがって　**$x=2$，$y=-4$ のとき　最大値 28，**
$x=1$，$y=-1$ のとき　最小値 4



[B]　消去する文字に条件がある場合は，残る文字の条件におき換える。ここでは，y の条件を x におき換えている。

3 **[正解]** ソ：③，タ：②，チ：0，ツ：2

[解説]

$$y=x^4+2x^2+2=(x^2)^2+2x^2+2$$

$$=\boldsymbol{t^2+2t+2}$$ [C]

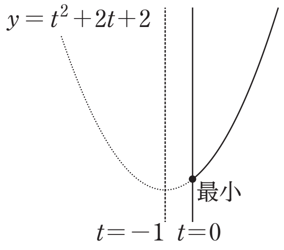
[C]　4 次関数について，$t=x^2$ とおき換えを行うことで，2 次関数として扱うことができる場合がある。おき換えた文字の変域に注意。

また，$t=x^2$ より　$\boldsymbol{t \geqq 0}$

$y=t^2+2t+2$ より

$$y=(t+1)^2+1$$

$t \geqq 0$ の範囲で，y は $t=0$ のとき最小値 2 をとる。

$t=0$ のとき　$x^2=0$　より　$x=0$

したがって　**$x=0$ のとき　最小値 2**